

**ПРОГНОЗ ЗНАЧЕНИЙ МОЩНОСТИ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА
ПРИМЕСИ, ДИФФУНДИРУЮЩЕЙ В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ**

Е.А. Семенчин, М.В. Кузякина

Задача прогноза значений мощности точечного источника примеси, диффундирующей в турбулентной атмосфере, сведена к задаче линейной стохастической экстраполяции.

**PREDICTION OF PERCOLATING IN THE TURBULENT ATMOSPHERE
ADMIXTURE POINT SOURCE POWER.**

Semenchin E.A., Kuzyakina M.V.

The problem of prediction of percolating in the turbulent atmosphere admixture point source power is reduced to the linear stochastic extrapolation problem.

Введение

В настоящее время в промышленно развитых странах актуальной является проблема загрязнения атмосферы промышленными выбросами (см. [1] и библиографию, приведенную в этой монографии). Исследования, посвященные решению различных задач в рамках этой проблемы, как правило, основаны на анализе математических моделей рассеяния примесей в турбулентной атмосфере, в частности, полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии при заданных для его решения краевых условиях. Большое прикладное значение имеет задача определения мощности источника примеси по заданным замерам ее

концентрации в различных точках верхнего полупространства трехмерного пространства в фиксированные моменты времени [2]. В данной работе результаты этих исследований уточняются и расширяются: подробно изучается (с помощью метода стохастической линейной фильтрации Калмана-Бьюси) задача прогноза значений мощности точечного источника примеси, диффундирующей в турбулентной атмосфере.

Формальная постановка задачи

Математическая модель, описывающая процесс рассеяния примеси в турбулентной атмосфере, имеет вид [4, 5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial x} - w \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q}{\partial z} + f, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (1)$$

$$q(0, x, y, z) = 0, \quad (2)$$

$$\left\{ K_z \frac{\partial q}{\partial z} + wq \right\} \Big|_{z=z_0} = \{ V_s q \} \Big|_{z=z_0}, \quad (3)$$

$$q(t, x, y, z) \rightarrow 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty, \quad z \geq 0, \quad (4)$$

где $q(t, x, y, z)$ – средняя концентрация примеси в точке $(x, y, z) \in E_+^3$, $E_+^3 = \{(x, y, z) : x, y \in (-\infty; \infty), z \geq 0\}$, в момент времени t , $t \in [0, T]$, $T = \text{const} > 0$; K_x , K_y , K_z – коэффициенты турбулентной диффузии соответственно вдоль осей Ox , Oy , Oz ; U – компонента средней скорости ветра вдоль оси Ox ; w – скорость осаждения частиц примеси вдоль оси Oz на подстилающую поверхность; z_0 – коэффициент шероховатости подстилающей поверхности (введение коэффициента шероховатости подстилающей поверхности z_0 позволяет учитывать рельеф местности [4, 6]); $\varphi(x, y, z)$, f , V_s – соответственно фоновая концентрация, функция источника, скорость сухого осаждения этой примеси.

Будем предполагать, что коэффициенты в (1) связаны соотношением [7]:

$$K_x = K_y = K_0 U, \quad K_0 = \text{const},$$

$U = U(t, x, y, z)$, $w = w(t, x, y, z)$, $V_s = V_s(t, x, y, z)$ непрерывны в E_+^3 ,

$K_z = K_z(t, x, y, z)$ - непрерывно дифференцируемая функция в $[0, T] \times E_+^3$.

Цель данной работы – предложить математическую модель прогноза значений мощности $Q(t)$ точечного источника непрерывного действия для $t \in (s, T]$, при заданных значениях $Q(t)$ при $t \leq s$.

Для того, чтобы построить указанный прогноз значений $Q(t)$, необходимо предварительно решить следующую задачу: определить мощность $Q(t)$ для $t \in [0, s]$, $s < T$, по экспериментально заданным значениям концентрации примеси $q(t, x, y, z)$, параметрам модели (1)–(4) (U , W , K_x , K_y , K_z) и координатами источника $(0, 0, H)$ при указанном t . Эта задача является обратной в рамках математической модели рассеяния примеси (1) – (4).

Методика решения задачи восстановления мощности источника примеси

Из (1) следует, что

$$\begin{aligned} f(t, x, y, z) = & \frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial x} - W \frac{\partial q}{\partial z} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q}{\partial z}. \end{aligned}$$

Пусть источник f в (1) является точечным с координатами (x_0, y_0, H) , т.е. [4]

$$f(t, x, y, z) = Q(t) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - H),$$

где $Q(t)$ – мощность данного источника (масса примеси, выброшенной в атмосферу источником в момент времени t).

Можно убедиться [2-4], что если в (1) f заменить на $Q(t)$, то решение q задачи (1)–(4) не изменится, и, следовательно,

$$Q(t) = \frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial x} - w \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} K_y \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial q}{\partial z}. \quad (5)$$

Таким образом, для решения рассматриваемой обратной задачи достаточно вычислить производные в (5) в заданных точках (x, y, z) в момент времени t и подставить эти значения в правую часть (5).

Согласно [8] задача нахождения производной n -го порядка $z(t)$ функции $u(t)$ (т.е. $z(t) = u^{(n)}(t)$) сводится к решению (относительно $z(t)$) интегрального уравнения первого рода. В частности, для $z(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial t}$ имеем уравнение

$$\int_0^t z(\tau) d\tau = u(t) - u(0), \quad (6)$$

для $z(t) = \frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2}$ - уравнение

$$\int_0^t (t - \tau) z(\tau) d\tau = u(t) - u(0) - t \left(\frac{\partial u(t)}{\partial t} \right) \Big|_{t=0}. \quad (7)$$

Предполагаем, что $u(0)$, $\frac{\partial u(0)}{\partial t}$ - заданные величины.

Обозначим

$$\begin{aligned} R_x(t, x, y, z) &= \frac{\partial q(t, x, y, z)}{\partial x}, \quad R_z(t, x, y, z) = \frac{\partial q(t, x, y, z)}{\partial z}, \\ R_t(t, x, y, z) &= \frac{\partial q(t, x, y, z)}{\partial t}, \quad R_{xx}(t, x, y, z) = \frac{\partial^2 q(t, x, y, z)}{\partial x^2}, \\ R_{yy}(t, x, y, z) &= \frac{\partial^2 q(t, x, y, z)}{\partial y^2}, \quad R_{zz}(t, x, y, z) = \frac{\partial^2 q(t, x, y, z)}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Тогда, согласно (6) – (7), для определения, например, $R_z(t, x, y, z)$ и $R_{zz}(t, x, y, z)$ имеем интегральные уравнения:

$$q(t, x, y, z) - q(t, x, y, 0) = \int_0^z R_z(t, x, y, \tau) d\tau. \quad (8)$$

$$\begin{aligned} q(t, x, y, z) - q(t, x, y, 0) = \\ = \int_0^z [(z - \tau) R_{zz}(t, x, y, \tau)] d\tau + z R_z(t, x, y, 0). \end{aligned} \quad (9)$$

Т. к. (8) и (9) представляют собой интегральные уравнения первого рода относительно неизвестных функций R_z и R_{zz} соответственно, то задача построения их решений является некорректно поставленной [7]. При построении численного решения перейдем от (8), (9) к их дискретным аналогам [12]:

$$q(t, x, y, z) - q(t, x, y, 0) = \sum_{k=1}^p [R_z(t, x, y, z_k) \cdot r_k], \quad (10)$$

$$\begin{aligned} q(t, x, y, z) - q(t, x, y, 0) - z R_z(t, x, y, 0) = \\ = \sum_{k=1}^p [(z_p - z_k) R_{zz}(t, x, y, z_k) r_k], \end{aligned} \quad (11)$$

$z_1, \dots, z_p$ - точки деления интервала $[0, z]$,

$$r_k = \begin{cases} \frac{z_2 - z_1}{2}, & k = 1, \\ \frac{z_{k+1} - z_{k-1}}{2}, & k = 2, \dots, (p-1), \\ \frac{z_p - z_{p-1}}{2}, & k = p. \end{cases} \quad (12)$$

Согласно (10), (11) по значениям $q(t_1, x, y, z), \dots, q(t_N, x, y, z)$, заданным в точке (x, y, z) в различные моменты времени $t_1, \dots, t_N \in [0, s]$ с ошибками измерения соответственно $v_1 = \tilde{v}(t_1)$, $v_2 = \tilde{v}(t_2)$, ..., $v_N = \tilde{v}(t_N)$ ($\tilde{v}(t)$ – случайный процесс типа белого гауссова шума), требуется найти (восстановить)

значения $R_z(t_1, x, y, z_k), \dots, R_z(t_N, x, y, z_k)$ и $R_{zz}(t_1, x, y, z_k), \dots, R_{zz}(t_N, x, y, z_k)$ соответственно, $k = 1, \dots, p$.

Введем в рассмотрение матрицу $A = (A_{ik})$, все столбцы которой одинаковы.

В случае (10) матрица A имеет вид:

$$A_{ik} = r_k, \quad k = 1, \dots, p, \quad i = 1, \dots, N,$$

в случае (11) - вид:

$$A_{ik} = (z_p - z_k) \cdot r_k, \quad k = 1, \dots, p, \quad i = 1, \dots, N.$$

С учетом введенных выше обозначений и замечаний из (10) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{k=1}^p \left[A_{1k} \cdot R_z(t_1, x, y, z_k) \right] + v_1 = \\ & = q(t_1, x, y, z) - q(t_1, x, y, 0), \\ & \sum_{k=1}^p \left[A_{2k} \cdot R_z(t_2, x, y, z_k) \right] + v_2 = \\ & = q(t_2, x, y, z) - q(t_2, x, y, 0), \\ & \dots\dots\dots \\ & \sum_{k=1}^p \left[A_{Nk} \cdot R_z(t_N, x, y, z_k) \right] + v_N = \\ & = q(t_N, x, y, z) - q(t_N, x, y, 0), \end{aligned} \right. \quad (13)$$

из которой надо определить $R_z(t, x, y, z_k)$, из (11) - систему линейных алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{k=1}^p \left[A_{1k} \cdot R_{zz}(t_1, x, y, z_k) \right] + v_1 = \\ & q(t_1, x, y, z) - q(t_1, x, y, 0) - z \cdot R_z(t_1, x, y, 0), \\ & \sum_{k=1}^p \left[A_{2k} \cdot R_{zz}(t_2, x, y, z_k) \right] + v_2 = \\ & q(t_2, x, y, z) - q(t_2, x, y, 0) - z \cdot R_z(t_2, x, y, 0), \\ & \dots\dots\dots \\ & \sum_{k=1}^p \left[A_{Nk} \cdot R_{zz}(t_N, x, y, z_k) \right] + v_N = \\ & q(t_N, x, y, z) - q(t_N, x, y, 0) - z \cdot R_z(t_N, x, y, 0), \end{aligned} \right. \quad (14)$$

из которой надо определить $R_{zz}(t, x, y, z_k)$.

Системы (13), (14) перепишем в матричном виде:

$$AR_z + \tilde{v} = q_{(z)}, \quad (15)$$

$$AR_z + \tilde{v} = q_{(zz)}, \quad (16)$$

где

$$q^{(z)} = \left(q^{(z)}(t_1, x, y, z_k), \dots, q^{(z)}(t_N, x, y, z_k) \right)^T,$$

$$q^{(z)}(t_i, x, y, z_k) = q(t_i, x, y, z_k) - q(t_i, x, y, 0),$$

$$q^{(zz)} = \left(q^{(zz)}(t_1, x, y, z_k), \dots, q^{(zz)}(t_N, x, y, z_k) \right)^T$$

$$q^{(zz)}(t_i, x, y, z_k) = q(t_i, x, y, z_k) - q(t_i, x, y, 0) - z \cdot R_z(t_i, x, y, 0),$$

$i = 1, 2, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots, p$, T – операция транспонирования.

Для подавления влияния значений белого шума $\tilde{v}(t)$ на значения

$R_z(t_k, x, y, z_p)$ и $R_{zz}(t_k, x, y, z_p)$, $k=1, \dots, N$, можно использовать многоступенчатый

(многократный) фильтр Калмана-Бьюси [10].

Зададим начальные приближения для решения $R_z^{(0)} = R_z(0, x, y, z)$ и матрицы ковариаций ошибок решения $P^{(0)}$. Для их выбора удобно использовать метод регуляризации Тихонова [8], согласно которому

$$R_z^{(0)} = (\alpha E + A^T A)^{-1} A^T q, \quad P^{(0)} = \delta^2 (\alpha E + A^T A)^{-1}, \quad (17)$$

где E – единичная матрица, $\alpha > 0$ – параметр регуляризации, играющий роль неопределенного множителя Лагранжа, $\delta \geq 0$ – верхняя оценка значения погрешности правой части (15).

Последующие приближения $R_z^{(l)}$ решения R_z системы (13) могут быть найдены по следующей итерационной схеме [11]:

$$R_{zz}^{(l)} = R_{zz}^{(l-1)} + \left((P^{(l-1)})^{-1} + (A^{(l)})^T (N^{(l)})^{-1} A^{(l)} \right)^{-1} (A^{(l)})^T (N^{(l)})^{-1} (q^{(l)} - A R_{zz}^{(l-1)}), \quad (18)$$

$$P^{(l)} = \left((P^{(l-1)})^{-1} + (A^{(l)})^T N^{(l)} A^{(l)} \right)^{-1}, \quad N^{(l)} = M[\tilde{v}^{(l)} (\tilde{v}^{(l)})^T], \quad l = 1, 2, \dots, L. \quad (19)$$

Зададим начальные приближения для решения $R_{zz}^{(0)} = R_{zz}(0, x, y, z)$ и матрицы ковариаций ошибок решения $P^{(0)}$. Для их выбора удобно использовать соотношения (13), подставив в них $R_{zz}^{(0)}$ вместо $R_z^{(0)}$.

Последующие приближения $R_{zz}^{(l)}$ решения R_{zz} системы (14) так же могут быть найдены по итерационной схеме (18)-(19), в которой $R_z^{(l)}$ заменены на $R_{zz}^{(l)}$.

На практике можно столкнуться с ситуацией, когда обратные матрицы в соотношениях (17)-(19) найти (определить) невозможно (рассматриваемые матрицы могут быть вырожденными). В этом случае вместо обратных матриц следует использовать в (17)-(19) псевдообратные, воспользовавшись методом Гревилля построения псевдообратной матрицы [12].

Соотношения (17)-(19) позволяют найти значения оценок $R_z^{(L)}$, $R_{zz}^{(L)}$ соответственно величин R_z , R_{zz} с заданной погрешностью $\varepsilon > 0$. Аналогично определяются $R_t^{(L)}$, $R_x^{(L)}$, $R_{xx}^{(L)}$, $R_{yy}^{(L)}$ соответственно для R_t , R_x , R_{xx} , R_{yy} .

Подставляя найденные оценки в (5), получим наилучшую в среднем квадратическом смысле оценку $Q(t_k)$ значения $Q(t_k)$:

$$Q(t_k) = R_t^{(L)} + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot R_x^{(L)} - \frac{\partial w}{\partial z} \cdot R_z^{(L)} - K_x \cdot R_{xx}^{(L)} - \frac{\partial K_x}{\partial x} \cdot R_x^{(L)} - \\ - K_y \cdot R_{yy}^{(L)} - \frac{\partial K_y}{\partial y} \cdot R_y^{(L)} - K_z \cdot R_{zz}^{(L)} - \frac{\partial K_z}{\partial z} \cdot R_z^{(L)}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (20)$$

Описанный алгоритм реализован в программном продукте «МФКВ» на языке программирования MATLAB C/C++ Math Library 2.2 [13].

Решение задачи прогноза значений мощности источника

Если найдены $R_{zz}^{(L)}(s)$ и $P^{(L)}(s)$, то можно построить прогноз значений мощности источника $Q(t)$ для любого момента времени $t \in (s, T]$.

Задача оптимальной экстраполяции [14] (прогноза состояния системы) состоит в построении наилучшей в среднеквадратическом смысле оценки будущего состояния системы на отрезке времени $(s, T]$ по результатам наблюдений этой системы, проведенным на отрезке $[0, s]$. Поэтому, чтобы построить прогноз значений $Q(t)$, $t \in (s, T]$, достаточно найти прогнозируемые на момент t оценки $\tilde{R}_t$, $\tilde{R}_x$, $\tilde{R}_z$, $\tilde{R}_{xx}$, $\tilde{R}_{yy}$, $\tilde{R}_{zz}$ для производных R_t , R_x , R_z , R_{xx} , R_{yy} , R_{zz} соответственно и подставить их в уравнение (5).

Для вычисления матрицы $\tilde{P}(t)$ необходимо решить линейное дифференциальное уравнение [14]

$$\frac{d\tilde{P}(t)}{dt} = A(t)\tilde{P}(t) + \tilde{P}(t)A^T(t) + N(t), \quad t \in [s, T] \quad (21)$$

с начальным условием $\tilde{P}(s) = P^{(L)}(s)$ из (14).

При вычислении оптимальной оценки экстраполяции $\tilde{R}_{zz}$ находим решение системы

$$\frac{d\tilde{R}_{zz}(t)}{dt} = A(t)\tilde{R}_{zz}(t) \quad (22)$$

на отрезке $t \in [s, T]$ с начальным условием $\tilde{R}_{zz}(s) = R_{zz}^{(L)}(s)$, определяемым из (11).

Соотношения (21), (22) позволяют найти значения величины $\tilde{R}_{zz}(t)$ – прогнозное значение $R_{zz}(t)$ в момент времени $t \in [s, T]$. Аналогично определяются $\tilde{R}_t(t)$, $\tilde{R}_x(t)$, $\tilde{R}_z(t)$, $\tilde{R}_{xx}(t)$, $\tilde{R}_{yy}(t)$, соответственно для $R_t(t)$, $R_x(t)$, $R_z(t)$, $R_{xx}(t)$, $R_{yy}(t)$.

Подставляя найденные оценки в (20), получим прогнозируемое на момент t значение $\tilde{Q}(t)$ мощности источника $Q(t)$:

$$\begin{aligned} Q(t_k) = & \tilde{R}_t(t) + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \tilde{R}_x(t) - \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \tilde{R}_z(t) - K_x \cdot \tilde{R}_{xx}(t) - \frac{\partial K_x}{\partial x} \cdot \tilde{R}_x(t) - \\ & - K_y \cdot \tilde{R}_{yy}(t) - \frac{\partial K_y}{\partial y} \cdot \tilde{R}_y(t) - K_z \cdot \tilde{R}_{zz}(t) - \frac{\partial K_z}{\partial z} \cdot \tilde{R}_z(t), \quad t \in [s, T]. \end{aligned} \quad (23)$$

Пример

Для проверки качества работы алгоритма по указанной методике, воспользуемся экспериментальными данными, взятыми из отчетов по инвентаризации источников выбросов загрязняющих веществ в атмосферу 2005 года, предоставленных Центром лабораторного анализа и технических измерений по Южному Федеральному округу (ЦЛАТИ по ЮФО) и содержащими информацию о выбросах в атмосферу диоксида азота. Согласно этим данным:

$H = 20$ м, $U = 0,5 \ln z$ (м/с), $K_x = K_y = K_0 U$ м²/с, $K_0 = 0,25$ м, $K_z = 0,15z$ м²/с,
 $t_0 = 0$ с, $w = 0,01$ (м/с).

С помощью (20) найдена наилучшая в среднем квадратическом смысле оценка значения мощности источника примеси на отрезке времени $[0;35]$, а для моментов времени $t \in (35;55]$ найдены прогнозируемые значения мощности источника примеси с помощью (23) (вычисления проводились в пакете прикладных программ MatLab). Графическая визуализация результатов проведенных расчетов приведена на рисунке 1.

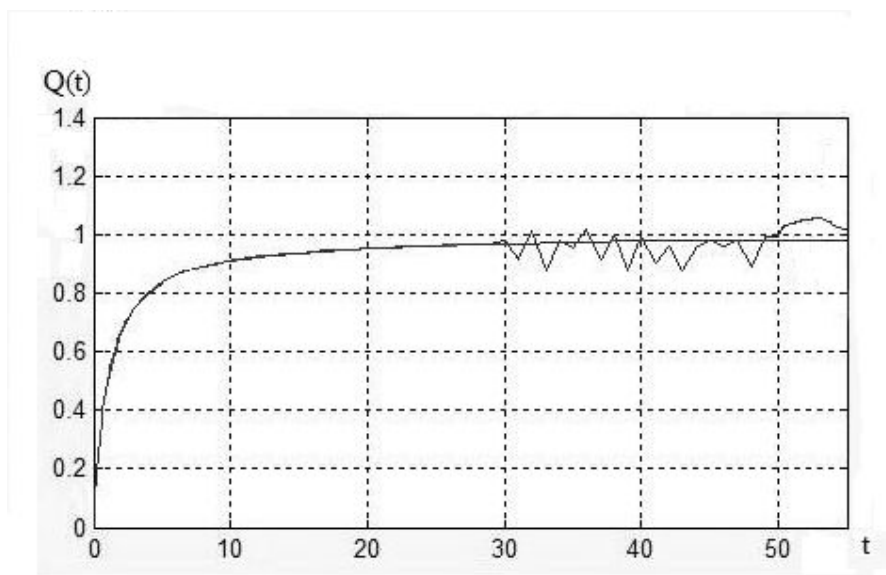


Рисунок 1 – Графическое изображение значений экспериментальной (гладкая линия) и расчетной (ломанная линия) мощностей источника примеси.

Согласно проведенным расчетам совпадение (с малой погрешностью) экспериментальных и восстановленных значений мощности точечного источника происходит почти на всем рассматриваемом отрезке времени ($t \in [0;35]$). Только в конце отрезка расчетная мощность источника примеси начинает отклоняться от

экспериментальной (см. рис.1). При этом этот эффект, как показывают численные эксперименты, не зависит от длины интервала $(0, T)$.

Недостаток предложенной методики прогноза мощности источника заключается в следующем. Если ядро интегрального уравнения (8), (9) принимает значения меньше 10^{-4} , то восстановить мощность источника примеси практически невозможно. Этот недостаток алгоритма можно устранить путем масштабирования ядра рассматриваемого интегрального уравнения. Кроме того, для определения матрицы ковариаций ошибок и начальных приближений многошаговый фильтр Калмана-Бьюси требует большого объема статистических данных [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алоян А.Е.* Моделирование динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей в атмосфере. - М.: Наука, 2008. – 415 с.
2. *Семенчин Е.А., Кармазин В.Н., Калина Н.Н.* О разрешимости некоторых обратных задач для уравнения атмосферной диффузии. Экологический вестник научных центров Черноморского экологического сотрудничества, №4, 2005. – С. 47– 51
3. *Семенчин Е.А., Кузякина М.В.* Методика расчета экономического ущерба, причиняемого воздушной среде выбросами легкой примеси от промышленных предприятий. Труды Кубанского государственного аграрного университета, 2009, 2(17). – С. 34– 39
4. *Семенчин Е.А.* Аналитические решения краевых задач в математической модели атмосферной диффузии. Ставрополь: СКИУУ, 1993. 141 с.
5. *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 320 с.

6. *Бызова Н.Л., Гаргер Е.К., Иванов В.Н.* Экспериментальные исследования атмосферной диффузии и расчеты рассеяния примеси. – Л.: Гидрометеоиздат, 1991. 279 с.
7. *Берлянд М.Е.* Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. – Л.: Гидрометеоиздат, 1975. – 448 с.
8. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 142 с.
9. *Лоскутова Е. О.* Прямые и обратные задачи расчета количества примеси, выпадающей на подстилающую поверхность: Дис. канд. физ.-мат. наук: 25.03.09 / Кубанский государственный университет. – Краснодар, 2009. 144 с.
10. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1986. 544 с.
11. *Сизиков В.С.* Устойчивые методы обработки результатов измерений. Учебное пособие – СПб: СпецЛит, 1999. 240 с.
12. *Гантмахер Ф.Р.*, Теория матриц. – М.: Физматлит, 2004. 576 с.
13. *Кузякина М.В., Семенчин Е.А.* Оценка интенсивности источника примеси с помощью многошагового фильтра Калмана-Бьюси. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010613713, 07.06.2010 г.
14. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003. 614 с.